

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 532.529

В.М. Буйвол, д-р фіз.-мат. наук

ЕВОЛЮЦІЯ НЕСФЕРИЧНИХ ПОРОЖНИН У РІДИНІ

Інститут комп'ютерних технологій НАУ, e-mail: iit@nau.edu.ua

Розглянуто еволюцію порожнин несферичної форми в рідині. Запропоновано математичну модель динаміки порожнини в рідині. Визначено форми еліпсоїдальної порожнини і їх залежності від моменту часу з урахуванням впливу поля сили тяжіння.

Вступ

Поведінка порожнини сферичної форми в рідині вивчена досить добре і є декілька математичних моделей, які тою чи іншою мірою враховують вплив реальних властивостей рідини на порожнину [1]. Але, якщо форма порожнини не сферична, то розрахунок динаміки такої порожнини є досить складним і тому тривають пошуки більш простих математичних моделей, придатних із задовільною точністю описати процес деформування таких порожнин.

Аналіз досліджень та мета статті

Дослідження течій навколо порожнин виконуються у рамках тих чи інших математичних моделей рідини [1–4].

Модель, яка найбільш адекватно описує основні закономірності течій, як правило, пов'язана з використанням рівнянь Нав'є – Стокса, котрі дозволяють досить повно описати дію в'язких сил. Але ці рівняння складні, мають різні розв'язки в різних діапазонах зміни чисел Рейнольдса і не завжди їх застосування є доцільним.

Як показано в праці [5], за певних умов можна побудувати хоча і менш точні, але значно простіші математичні моделі. Доказом цього можуть бути праці [6; 7], в яких описані експериментальні дослідження і розрахунки на основі потенціальної теорії ідеальної рідини. Спираючись на результати цих досліджень, у статті зроблена спроба описати еволюцію початково еліпсоїдальної порожнини в рідині з урахуванням дії поля сили тяжіння.

Постановка задачі

Серед властивостей рідини, які найбільш суттєво впливають на поведінку порожнини, у першу чергу треба назвати вагомість рідини, поверхневий натяг та її в'язкість. Якщо вплив цих сил на поведінку порожнини не дуже значний, то можна побудувати математичні моделі руху порожнини в такій рідині і на їх основі отримати розрахункові дані для побудови форми порожнини залежно від моменту часу.

Проте реально це можна здійснити лише в рамках лінійної чи лінеаризованої теорії і принципу суперпозиції, що, звичайно, робить результати тим більш достовірними, чим меншим буде прояв дії цих сил. Тому лінеаризована модель може бути застосована, якщо не до великих проявів дії сил, то до цілком помірних, тобто середніх. Одна з таких моделей запропонована в працях [3; 5]. Вона зводиться до системи диференціальних рівнянь відносно мод деформацій порожнини.

Коротко висвітлення основні риси математичної моделі, зауважимо, що в основу методу покладена гідродинаміка сферичних порожнин в ідеальній рідині. Вважаючи потенціали цих течій відомими, як і форми порожнин, збурення течії визначають за формулами:

$$\begin{aligned}\Phi &= (t, r, \theta) = \Phi_0(t, r) + \varphi(t, r, \theta); \\ R(t, \theta) &= R_0(t) + f(t, \theta),\end{aligned}\quad (1)$$

де r, θ – сферичні координати.

При цьому збурення потенціалу φ і радіуса f порожнини можуть бути викликані різними збуреннями фізичної або геометричної природи. До них можна віднести все, що відрізняє конкретну математичну модель від моделі незбуреної течії (Φ_0, R_0), наприклад, збурення, пов'язані з наявністю поля сили тяжіння і поверхневого натягу, стисливості рідини та її в'язкості, місцевого тиску, а також з різними геометричними особливостями течії (формою незбуреної порожнини, її орієнтацією, несиметричністю, обмеженістю течії та ін.).

Потенціал φ збурення як розв'язок рівняння Лапласа (для зовнішності порожнини) має вигляд

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(t)}{r^{n+1}} P_n(\mu),$$

де $a_n(t)$ – коефіцієнти, які треба знайти; $P_n(\mu)$ – поліноми Лежандра n -го порядку; $\mu = \cos \theta$.

Визначаючи збурення $f(t)$ радіуса (1) у вигляді такого самого ряду

$$f(t, 9) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) P_n(\mu),$$

для функцій $f_n(t)$ одержали нескінченну систему диференціальних рівнянь [3]:

$$R_0 \ddot{R}_0 + \frac{3}{2} \dot{R}_0^2 = \frac{\tilde{p} - p_{\infty}}{\rho}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & -R_0 \ddot{f}_0 - 3\dot{R}_0 \dot{f}_0 - \ddot{R}_0 f_0 + \frac{u^2}{4R_0} = \\ & = \frac{8\bar{H}_0}{We} + \frac{\bar{Z}_0}{2Fr^2} - \frac{\dot{u}}{2} (R_0 + f_0 - \frac{7}{5} f_2) - \\ & - \frac{u}{2} \left(\dot{R}_0 + \dot{f}_0 - \frac{3}{5} \dot{f}_2 - \frac{4\dot{R}_0}{5R_0} f_2 \right) + \frac{27u^2}{70R_0} f_3 = \tilde{\sigma}_1; \\ & - \frac{R_0 \ddot{f}_n + 3\dot{R}_0 \dot{f}_n}{n+1} + \frac{3u}{2} \left(\dot{f}_{n-1} - \frac{2n+1}{2n+3} \dot{f}_{n+1} \right) + \\ & + \left[\frac{n-1}{n+1} \ddot{R}_0 + \frac{9nu^2}{2R_0} \frac{n^2(2n+1) - 2(n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] f_n - \\ & - \left[\frac{n\dot{u}}{2} + (n-1) \frac{3u\dot{R}_0}{R_0} \right] \frac{f_{n-1}}{2n-1} + \\ & + \left[\frac{5n+2}{2} \dot{u} + (n+1) \frac{3u\dot{R}_0}{R_0} \right] \frac{f_{n+1}}{2n+3} + \\ & + \delta_{n2} \left[\frac{3u^2}{4} + \left(\frac{\dot{u}}{2} + \frac{u\dot{R}_0}{R_0} \right) f_1 \right] - \\ & - \frac{9nu^2}{4R_0} \left[\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)} f_{n-2} \right] - \\ & - \frac{9nu^2}{4R_0} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} f_{n+2} \right] + \\ & + \frac{9u^2 f_1}{10R_0} \delta_{n3} = \tilde{\sigma}_n, (n \geq 2); \quad (3) \\ & \tilde{\sigma}_n = \frac{2(p_{\infty} - \tilde{p})}{\rho V_0^2} + \frac{8\bar{H}_n}{We} - \frac{\bar{Z}_n}{2Fr^2}, \end{aligned}$$

де \tilde{p}, p_{∞} – узагальнений тиск в порожнині та тиск на нескінченності; ρ – густина рідини; $u = \dot{f}_1, \tau$ – коефіцієнт поверхневого натягу; $\delta_{\text{дв}}$ – символ Кронекера; We, Fr – числа Вебера і Фруда за діаметром кулі, рівновеликої до порожнини:

$$We = \frac{\rho V_0^2 d_{i0}}{\tau};$$

$$Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gd_{i0}}};$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{p_{\infty} - p_k}{\rho}};$$

g – прискорення сили тяжіння; $\tilde{\sigma}_n, \bar{H}_n, \bar{Z}_n$ – відносні коефіцієнти розкладів в ряди за полінома-

ми Лежандра перепаду тиску $\frac{\tilde{p} - p_{\infty}}{\rho}$, середньої

кривини H і підвищення Z точки на межі порожнини над горизонтальною площиною:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right);$$

R_1, R_2 – головні кривини поверхні та підвищення точки на межі порожнини над горизонтальною площиною Z відповідно:

$$H_0 = \frac{1}{R_0};$$

$$H_n = \frac{(n-1)(n+2)}{2R_0^2} f_n(t);$$

$$Z_0 = f_1(t);$$

$$Z_1 = R_0 + f_0 + \frac{2}{5} f_2;$$

$$Z_3 = \frac{3}{7} f_3;$$

$$Z_n = \frac{nf_{n-1}}{2n-1} + \frac{(n+1)f_{n+1}}{2n+3}, \quad n > 3.$$

Узагальнений тиск \tilde{p} може бути обчислений за формулою

$$\tilde{p} = p_i + p_{\tau} + p_g + p_{\mu};$$

$$p_g = \rho g Z;$$

$$p_{\tau} = -2\tau H;$$

$$p_{\mu} = -4\mu \frac{\dot{R}}{R},$$

де τ, μ – коефіцієнти поверхневого натягу і в'язкості відповідно.

Розв'язавши систему (3) разом з рівнянням Релея (2) при відповідних початкових умовах і отримавши значення мод деформацій $f_n(t)$, знаходимо також потенціал швидкостей збуреного потоку:

$$\Phi = -\frac{\dot{R}_0 R_0^2}{r} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_0^{n+2}}{(n+1)r^{n+1}} \left(\dot{f}_n + 2\dot{R}_0 \frac{f_n}{R_0} \right) P_n(\mu).$$

Для розв'язання системи (3) необхідно мати функцію $R_0(t)$, яка є розв'язком рівняння Релея (2). Оскільки аналітичного виразу функція $R_0(t)$ не має, то використовують числовий розв'язок рівняння або апроксимаційні формули, які справедливі для $t \leq 0,9$:

$$R_0(t) = \sqrt{1 - 1,16 \left(\frac{V_0 t}{R_{i0}} \right)^2};$$

$$\dot{R}_0(t) = V_0 \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{R_{i0}^3}{R_0^3} - 1 \right)}.$$

Для прискорення колапсу маємо формулу

$$\ddot{R}(t) = V_0^2 \frac{R_{i0}^3}{R^4(t)},$$

$$\text{де } V_0 = \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}.$$

Знаючи потенціал Φ , вже неважко визначити тиск на поверхню порожнини, а також поле тисків навколо порожнини. Використавши формулу

$$R(t, \vartheta) = R_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) P_n(\mu),$$

можна побудувати і форму деформованої порожнини, яка, звичайно, буде змінюватися з часом.

Проте для інтегрування системи (3) потрібні початкові умови, яким мають бути підпорядковані моди деформацій і швидкості їх зміни в початковий момент часу. Ці початкові умови можна визначити, якщо розглядати еліпсоїдальну порожнину як результат збурення сферичної порожнини. Тоді радіус такої порожнини буде залежати в загальному випадку від одного кута, якщо порожнина є поверхнею обертання, що ми і будемо припускати. Запишемо рівняння еліпсоїда обертання

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

за допомогою сферичних координат $x = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = r \sin \vartheta$:

$$r(\vartheta) = \frac{ac}{\sqrt{c^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}},$$

де ексцентриситет $e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$, $a < c$ (горизонтально витягнутий еліпсоїд).

Нехай маємо розклад функції $r(\vartheta)$ за поліномами Лежандра:

$$r(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n P_n(\mu). \quad (4)$$

Помножимо рівність (4) на $P_m(\mu)$ і проінтегруємо нову рівність в межах $(-1, 1)$:

$$\int_{-1}^1 r(\vartheta) P_m(\mu) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu.$$

Далі скористаємося тим, що на цьому відрізку поліноми Лежандра є ортогональними:

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Виходячи з цього, маємо вирази для коефіцієнтів шуканого розкладу:

$$r_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 r(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{(2n+1)a}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(\mu) d\mu}{\sqrt{1 - e^2 \mu^2}}.$$

Використавши розклад радикала за малою величиною

$$e^2 \mu^2 \approx c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} e^{2m} \mu^{2m},$$

отримаємо остаточно

$$r_n = \frac{(2n+1)a}{2} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} e^{2m} \mu^{2m} P_{2n}(\mu) d\mu.$$

Запишемо три перших члени

$$r_0 = c \left(1 + \frac{e^2}{6} + \frac{3e^4}{40} + \frac{5e^6}{112} + \frac{35e^8}{1152} + \frac{63e^{10}}{2816} + \dots \right);$$

$$r_2 = c \left(\frac{e^2}{3} + \frac{3e^4}{14} + \frac{25e^6}{168} + \frac{175e^8}{1584} + \frac{1575e^{10}}{18304} + \dots \right);$$

$$r_4 = c \left(\frac{3e^4}{35} + \frac{15e^6}{154} + \frac{105e^8}{1144} + \frac{189e^{10}}{2288} + \dots \right);$$

$$r_6 = c \left(\frac{5e^6}{231} + \frac{7e^8}{198} + \frac{63e^{10}}{1498} + \dots \right);$$

Початковий радіус $R_{i0} = r_0$ кулі може бути розрахований як радіус кулі, рівновеликої з заданим еліпсоїдом, тобто об'єм кулі має дорівнювати об'єму еліпсоїда:

$$R_{i0} = \sqrt[3]{a^2 c}.$$

Тоді функції $f_{n0}(0)$ можна розглядати як початкові збурення сферичної порожнини з радіусом R_{i0} . Систему диференціальних рівнянь (3) у цьому випадку слід доповнити такими початковими умовами:

$$f_n(0) = r_n; \quad (5)$$

$$\dot{f}_n(0) = 0. \quad (6)$$

Рівність (6) означає, що початкові швидкості зміни деформацій дорівнюють нулю, хоча, звичайно, можна було б розглядати задачу і з ненульовими швидкостями деформацій.

Отже, система рівнянь (3) і початкові умови (5), (6) повністю визначають задачу Коші для цієї системи. Далі задачу Коші розв'язували методом Рунге-Кутта з автоматичним виведенням результатів розрахунків на друк у фіксовані моменти часу.

Висновки

На рисунку, a показано форму меридіонального перетину порожнини, яка утворюється у колапсуючій початково еліпсоїдальній порожнині з напівосями еліпсоїда $a = b = 1$, $c = 2,5$, в різні моменти часу: $t = 0,5$, $t = 0,7$, $t = 0,8$, без урахування впливу сили тяжіння і поверхневого натягу.

У початковий момент часу форма меридіонального перетину майже копіює форму еліпса. Починаючи з моменту часу $t = 0,7$, форма пере-

тину зовсім інша. Ті струмені рідини, які обтікають частину еліпсоїда біля великої осі, направлені всередину порожнини.

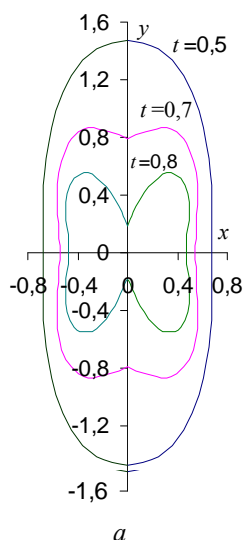
При подальшій еволюції порожнини ця течія ще більше проникає всередину порожнини.

Струмені рідини, які обтікають велику вісь, починають наче “вирізати” з порожнини її середину. Проте це відбувається вже при досить великих збуреннях, за яких використана тут теорія може виявитися непридатною.

Результати в цьому діапазоні деформацій можуть не відбивати реальної еволюції порожнини.

Автори праці [7] вели розрахунки до того моменту, коли кумулятивний струмінь “прошив” протилежний бік поверхні порожнини, зафіксували тороїдальну форму бульбашки.

З часом ця початково еліпсоїдальна порожнина перетворюється в тороїдальну (див. рисунок, б).



Форми меридіонального перетину порожнини:
а – $t = 0,5; t = 0,7; t = 0,8$; б – $t = 0,1; t = 0,5; t = 0,8$

До речі, до тороїдальної форми прямує і бульбашка в формі кулі при колапсі у полі сили тяжіння [6].

Зовсім інакший характер деформування має еліпсоїдальна порожнина ($a = b = 1; c = 2$), витягнута в напрямку сили тяжіння ($Fr = 4; We = 100$). На рисунку, б показано форми меридіональних перетинів цієї порожнини при її колапсі в момент часу

$$t = 0,1; t = 0,5; t = 0,8.$$

Збурення від сили тяжіння значно підсилені збуреннями, пов'язаними з несиметричністю форми порожнини. Добре видно прямування форми порожнини до тороїдальної форми, хоча цей тор дуже несиметричний. Ця несиметрія пов'язана саме з дією сили тяжіння. Сила Архімеда діє тільки знизу, хоча верхня частина поверхні порожнини теж починає рухатися назустріч нижній частині. Проте цей тор дещо подібний до того тора, який відбувається при колапсі сферичної бульбашки і про який пишуть автори праць [6; 7].

Список літератури

1. Воронин В.В., Мачехина Т.Н. Современное состояние исследований кавитационных течений: Обзор. – М.: ОНТИ ЦАГИ, 1985. – № 651. – 146 с.
2. Plesset M.S., Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation // Ann. Rev. Fluid mech. – 1977. – №9. – P. 145–185.
3. Буйвол В.Н. Движение и деформация газонаполненных полостей в жидкости // Прикл. гидромеханика: Сб. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 5–27.
4. Herman W.A.H.J. On the instability of the translating gas bubble under the influence of a pressure step // Philips Res. Repts Suppl. – 1973. – №3. – P. 2–26.
5. Буйвол В.Н., Шевчук Ю.Р. Уравнения деформаций всплывающего пузыря // Докл. АН УССР, Серия А. – 1987. – №5. – С. 34–37.
6. Best J.P. The formation of toroidal bubbles upon the collapse of transient cavities // J. Fluid Mech. – 1993. – Vol. 251. – P. 79–107.
7. Blake J.R., Robinson P.B., Shima A., Tomita Y. Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary // J. Fluid Mech. – 1993. – Vol. 255. – P. 707–721.

Стаття надійшла до редакції 25.01.05.

В.Н. Буйвол

Эволюция несферических полостей в жидкости

Рассмотрена эволюция полостей несферической формы в жидкости. Предложена математическая модель динамики полости в жидкости. Определены формы эллипсоидальной полости и их зависимости от момента времени с учетом влияния поля силы тяжести.

V.N. Buyvol

Evolution of cavities of not spherical form in a liquid

Evolution of cavities of not spherical form in a liquid is considered. The mathematical model of dynamics of a cavity in a liquid offered. Forms ellipsoidal cavities and their dependence on the moments of time are determined take into account of influence of a field of a gravity.